Théorie et théories de l'Information

Qq éléments de : **Information, complexité et hasard**

Jean-Paul Delahaye

disponibles aussi sur)i(nterstices

Oct08

Vous avez dit information ?

Dans la suite :

`00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000`

il y a sûrement moins d'information que dans la suite :

`26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399`

qui est plus *complexe* mais . .

pourquoi ?

Serait-ce que la 2ème suite
est (complexité aléatoire) :

sans ordre, sans régularité, aléatoire, chaotique ?

ou (complexité organisée)

organisé, fortement structuré, riche en information ?

Vous avez dit information ?

Il se trouve que :

26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399

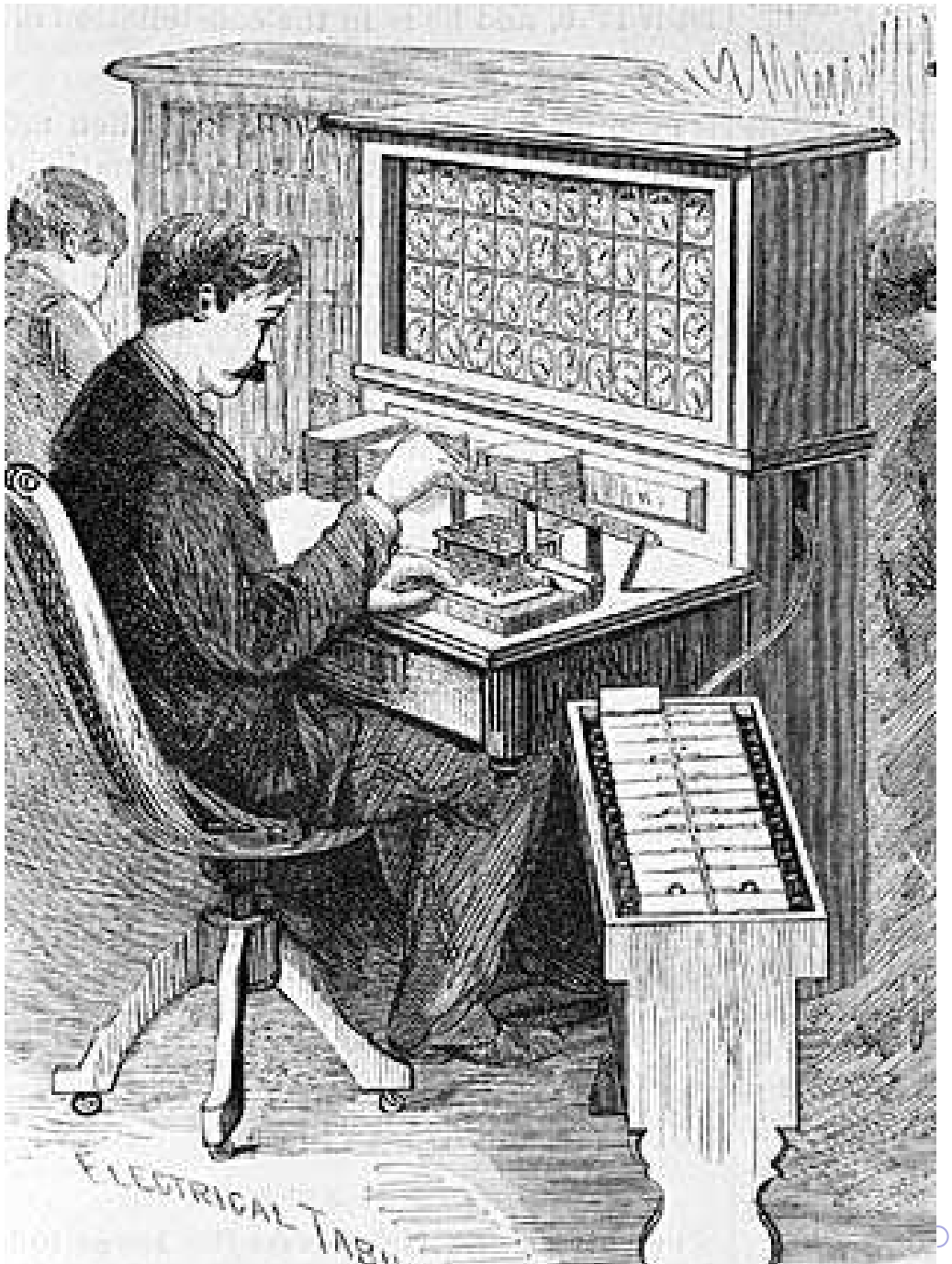
est la suite des décimales de π à partir de la sixième (après 14159).

Distinguons donc bien :
- Un contenu **brut** en information qui ne dépend pas du *sens*.
- La **valeur** d'une information dépend du *but* fixé.

avec deux grandes théories (selon le but) :
- **Théorie probabiliste de l'information (Shannon / thermodynamique)**
- **Théorie algorithmique de l'information (Kolmogorov / Bennett)**

en lien avec :
l'informatique théorique, les neurosciences computationnelles etc..

Vous avez dit information ?



Contenu brut en information

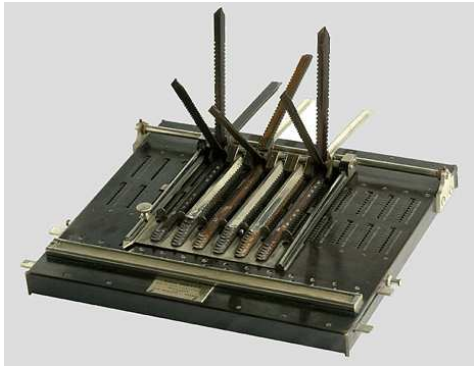
-1- Le contenu brut en information d'un booléen
(`1/0 vrai/faux oui/non yin/yang`) 1.
C'est l'"atome" d'information : le "bit".

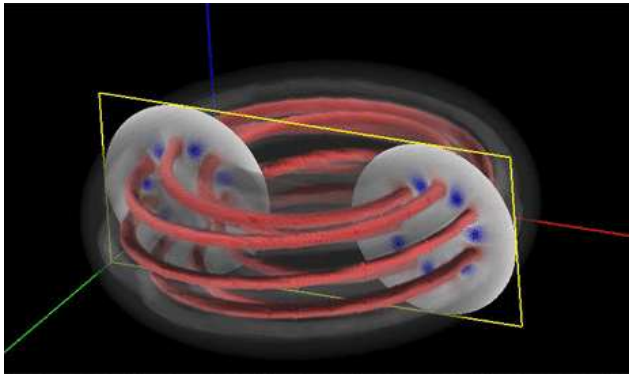
-2- Le contenu en information d'une valeur $v \in \{1, N\}$
(digits (N = 10), lettre de l'alphabet (N = 26), ..) est $log_2(N)$.
C'est le nombre de bits pour "coder" la valeur, en cohérence avec -1-

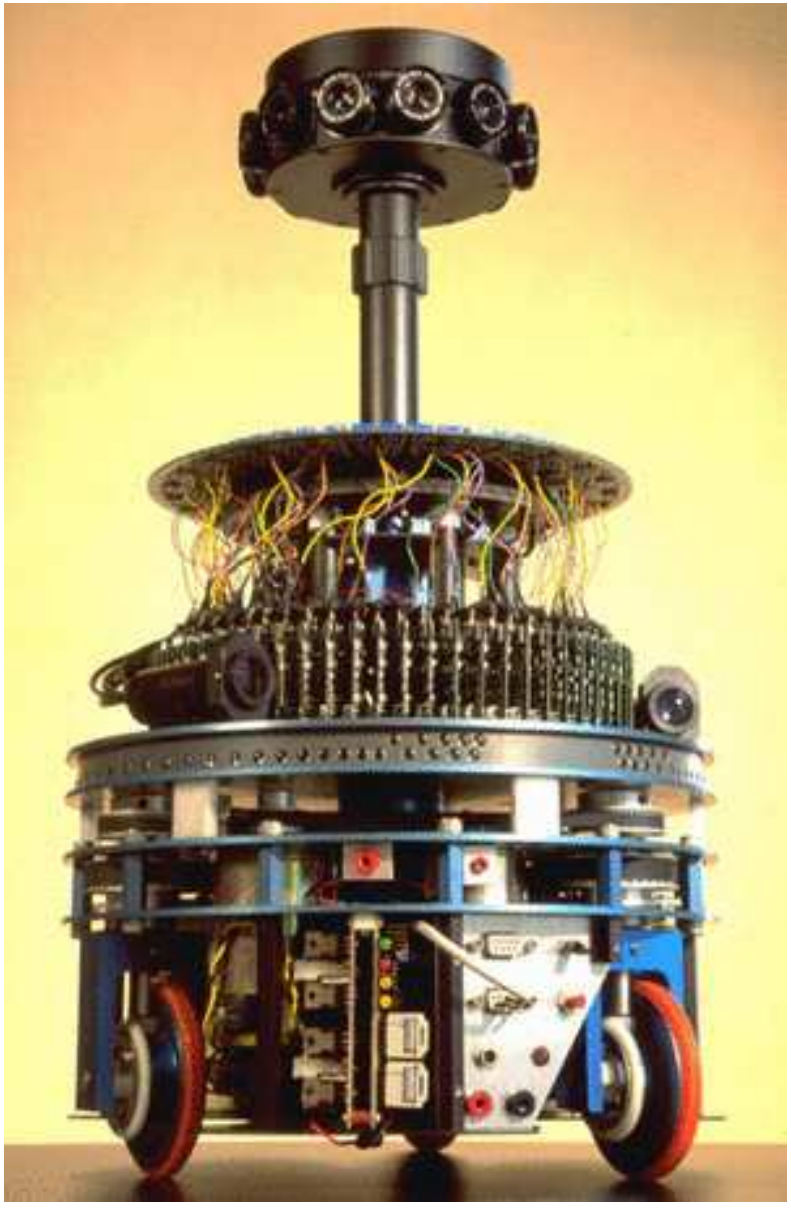
-3- Le contenu brut en information de n éléments "indépendants"
est la *somme* des contenus bruts.
mais inférieure si il y a de la *redondance* (compression)
mais sans *valeur* si il n'y a aucun lien entre les éléments !

```
- C'est le nombre minimal de questions oui/non à poser
pour trouver la valeur donnée !
```

Vous avez dit information ?







Contenu probabiliste en information

Pour le contenu probabiliste en information qui :

1/ N'est fonction que de la probabilité des évènements.

2/ Est additif pour deux sources indépendantes.

3/ Croît linéairement avec le nombre de réponses équiprobables.

On parle d'*entropie* au sens de Shannon et obtient une définition :

$$\mathcal{H}(p : \{1..n\} \to [0,1]) = -\sum_n p(n) \log_2 (p(n))$$

contenu moyen en information d'une distribution de probabilité.

Contenu probabiliste en information

- Pour une *distribution binaire* $p : \{0,1\} \to [0,1]$
  - $> \mathcal{H} = 1$ si $p(0) = p(1) = 1/2$: hasard complet, non-redondance
  - $> \mathcal{H} = 0$ si $p(0) = 1, p(1) = 0$: valeur fixe, rien à découvrir

- Pour une *distribution uniforme* $p : \{0, N\{ \to [0,1], p(i) = 1/N$.
  - $> \mathcal{H}$ est maximale
  - $> \mathcal{H} = \log_2(N)$: nb de bits pour coder la valeur

- Au delà :
  - $> \mathcal{H}$ est une valeur positive, bornée.
  - $>$ Elle se définit dans le cas continu à une *résolution donnée*.

Utilisation de l'information probabiliste : estimation

Que veut dire . . estimer une valeur incertaine ?

- `Si je sais rien de rien, j'peux qu'agir au hasard . .`
- `Si je sais quelque chose, c'est moins aléatoire !`

On cherche alors $p : \{0, N\{ \to [0,1]$, $\sum_n p(n) = 1$ t.q. :
$\sum_n p(n)\, f_i(n) = v_i, i \in \{1, m\}$ (contraintes), $\max_p \mathcal{H}(p)$ (entropie)

Une solution vérifie à minima les contraintes (rasoir d'Occam) :

$$p(n) = \frac{1}{Z}\, e^{-\sum_i \lambda_i f_i(n)}$$

pour des "multiplicateurs" λ_i donnés par les contraintes (Gibbs)

Si on donne moyenne/écart-type d'un réel, c'est la Gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

Si on donne le rythme moyen d'une série de "bips", c'est le Poisson

$$p(d) = r\, e^{-r\, d}, \; P\{\text{N tops pendant T}\} = \frac{(r\,T)^N}{N!}\, e^{-r\,T}$$

Utilisation de l'information probabiliste : transmission

Quelle information véhiculée par une réponse $\mathbf{r}$ à propos d'un stimulus $\mathbf{s}$?

- Une source s, grâce à un codage, envoie un message à un récepteur r
  $\rightarrow$ qui effectue le décodage dans un contexte perturbé de bruit.

On utilise la probabilité conditionelle $p(\mathbf{r}|\mathbf{s})$:

> Si $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}) = p(\mathbf{r})\,p(\mathbf{s})$ les deux n'ont rien à voir (indépendance).

> Si $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}) = p(\mathbf{s})$ les deux sont fonctionellement liées.

On définit alors l'information mutuelle (dépendance statistique)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{r},\mathbf{s}) &= \mathcal{H}[\text{réponse}] - \mathcal{H}[\text{variabilité non due à la source}] \\ &= \mathcal{H}[\text{réponse}] - \mathcal{H}[\text{réponse}|\text{source}] \\ &\leq \mathcal{H}[\text{réponse}] + \mathcal{H}[\text{source}] \end{aligned}$$

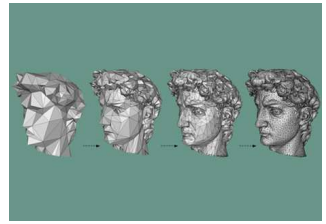
symétrique, positive, etc..

Qui utilise la règle de Bayes :

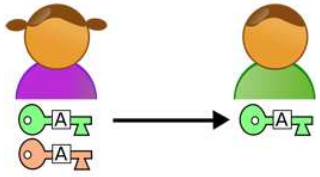
$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}) = p(\mathbf{r},\mathbf{s})/p(\mathbf{s}) = p(\mathbf{s}|\mathbf{r})\,p(\mathbf{r})/p(\mathbf{s})$$

Utilisation de l'information probabiliste : autres applications

- Codage de l'information



- Compression de données



- Cryptographie

- Corrections d'erreurs

Une variable d'entropie $\mathcal{H}(x)$ sera "presque sûrement" codée avec $\mathcal{H}(x)$ bits

Théorie algorithmique de l'information

La clé :

Est riche en information un message m . . complexe à calculer.

La complexité de Kolmogorov $K(m)$:

> La **longueur** du plus petit programme écrit pour une machine universelle qui génère le message.

Notion de machine universelle U

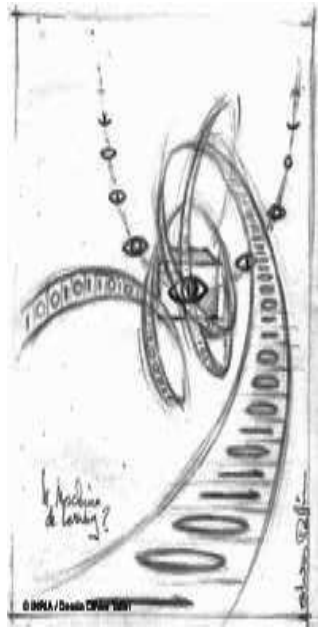
(ex : machine de turing)

Notion de machine optimale M :

$$K_M(m) \leq K_U(m) + C_U$$

universalité

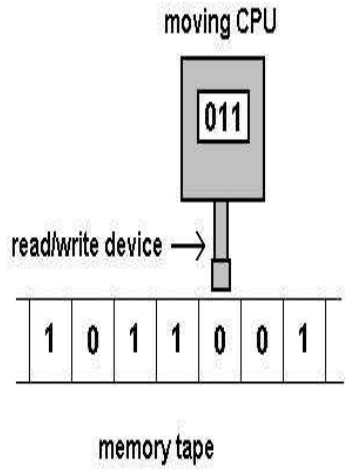
Mais : $K(m)$ n'est pas calculable !



Notion de machine universelle

Thèse de Church-Turing : Tout problème “algorithmique” peut être résolu par une machine de Turing.

-0- Un ruban plein de '0' où on peut écrire des '1'
-1- Une tête qui peut lire/écrire des 0/1
-2- Et se déplacer vers la gauche ou droite
-3- Une table d'actions
. qui définit en fonction du symbole lu :
. – quoi écrire,
. – comment se déplacer,
. – et quelle nouvelle action.



- Tou(te) *fonction calculable, programme/automate* se réduit à “ça”

- Les actions peuvent être codées sur un autre ruban pour être jouées : machine universelle

Notion de fonctions non calculables

- Les fonctions calculables sont dénombrables (elles sont définies par un ruban)
mais les fonctions sur un domaine infini contiennent $\mathcal{R}$

- Il y a plein d'exemples "utiles" :
Pas de programme universel qui en temps fini,
renvoie « oui » un programme va finir
et « non » s'il va "boucler sans fin".

et par déduction (Th. de Rice) :

* « le programme ne termine pas par une erreur d'exécution »
* « le programme calcule le spécifié »

- La complexité de Kolmogorov n'est pas calculable :

Car si $K(n)$ est calculable, alors le programme

```
for(int n = 1 ; K(n) <= x ; n++) ; print n ;
```

qui est de longueur $L = O(\log_2(x))$ génère un entier n donc la complexité est au plus L.

On peut alors montrer avec x suffisamment grand on obtient $n > L$: contradiction !

A propos d'échelles de complexité

- **Récursif** : *effectif :*

on peut déterminer son contenu par un moyen sans ambiguïté.

Classes L et P : temps de calcul logarithmique ou polynomial

Classe NP : résolus en énumérant les solutions possibles

(classifications selon temps de calcul et espace mémoire).

- **Récursivement énumérable** : *constructif :*

il se précise au fur et à mesure du temps, mais à chaque instant impossible de le cerner complètement.

- **Non récursivement énumérable** : *prospectif :*

accessible à l'intelligence humaine, mais rien ne l'épuise et rien ne pourra jamais l'épuiser.

Approximables : *par une suite croissante d'ensembles récursivement énumérable.*

Immunes : *on ne ne peut en décrire récursivement que des parties finies.*

Incompressibles : *on ne peut aller plus loin que les axiomes de base.*

Théorie algorithmique de l'information

La complexité de Kolmogorov $K(m)$:

> La **longueur** du plus petit programme écrit pour une machine universelle qui génère le message.

- Elle est bornée : au pire avec : `print m` et non additive.

- Elle capture la complexité aléatoire de l'information

- On peut la relier au notions d'
  incompressibilité = *imprévisibilité* = *absence de structure*

- L'entropie de Shannon correspond à la
  complexité de Kolmogorov moyenne (Grünwald Vitányi 2004)

Théorie algorithmique de l'information

La profondeur logique de Bennet $P(m)$:

> Le **temps de calcul** du plus petit programme écrit pour une machine universelle qui génère le message.

et non le temps de calcul du programme le plus rapide : c'est `print m` !

- Capture la notion de complexité organisée :

simple et peu profond :	cristal
simple et profond :	π à 10^{-10} près
aléatoire et peu profond :	gaz parfait
aléatoire et profond :	être vivant

- Approximativement invariant à la machine (si la longueur est définie à k près)
- Non additivité (deux moutons ne sont pas deux foix plus complexes q'un)
- Croissance lente (la profondeur augmente avec du calcul, mais lentement)
- Apparition "spontanée" de complexité organisée par le calcul
- Non calculabilité

Vous avez dit information ?